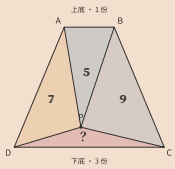
几何 · 梯形面积展开 · 差量对消 | 发题 2026年10月30日

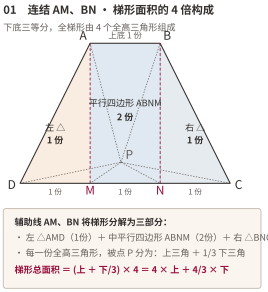
梯形下底是上底 3 倍：已知三块面积求第四块

原题

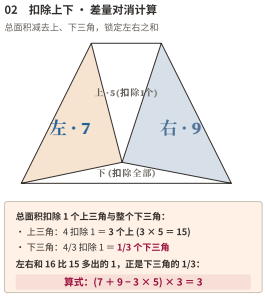
梯形 ABCD 中，下底 CD 的长是上底 AB 的 3 倍，PA、PB、PC、PD 将梯形分成四块，其中三块的面积如图所示（$S_{PAB}=5$，$S_{PAD}=7$，$S_{PBC}=9$），那么另一块的面积（S_{PCD}）是_____。



原理图解



连结 AM、BN，梯形自然分为 1+2+1 = 4 份全高三角形；每份等于「上 + 下/3」。



左右之和（16）减去 3 倍上三角（15）得到 1，乘 3 即得下三角面积 3。

解题步骤

1 连结 AM、BN：梯形面积 = (上 + 下/3) × 4

在下底取两个三等分点 M、N（使 DM = MN = NC = AB），连结 AM 和 BN：

- 左 △AMD 占 1 份全高三角形；
- 中间平行四边形 ABNM 面积是同底三角形的 2 倍，占 2 份；
- 右 △BNC 占 1 份全高三角形。

三部分合起来，整个梯形恰由 **1 + 2 + 1 = 4 份**全高三角形组成。每一份全高三角形被点 P 分为「上三角 + 1/3 下三角」，故：

梯形总面积 = (上 + 下/3) × 4 = 4 × 上 + 4/3 × 下

2 从总面积扣除上下，锁定左右两翼

整个梯形由「上、下、左、右」四块拼成。从总面积中各扣除 1 个上三角与 1 个下三角：

- 上三角留下：4 − 1 = **3 倍**；
- 下三角留下：4/3 − 1 = **1/3 倍**。

左 + 右 = 3 × 上 + 1/3 × 下

3 差量乘 3，直接得出下三角

左右两翼之和（7 + 9）减去 3 倍上三角（3 × 5），多出的差量恰好是下三角的三分之一。两边乘以 3：

$$S_{PCD} = (7 + 9 - 3 \times 5) \times 3 = 3$$

通用公式总结

若梯形下底是上底的 **k 倍**（CD = k · AB），P 为内部任意一点，则四块面积满足通用关系：

左 + 右 = k · 上 + (1/k) · 下

移项整理，即得求解下底三角形面积的**通用公式**：

$$S_{下} = [\,(S_{左} + S_{右}) - k \cdot S_{上}\,] \times k$$

- **k = 1（平行四边形）**：$S_{下} = S_{左} + S_{右} - S_{上}$，即经典的 **上 + 下 = 左 + 右**；
- **k = 2（下底是上底 2 倍）**：$S_{下} = [\,(S_{左} + S_{右}) - 2 \cdot S_{上}\,] \times 2$；
- **k = 3（本题）**：$S_{下} = [\,(7 + 9) - 3 \times 5\,] \times 3 = 3$。

下三角 PCD 面积 **3** 算式：(7 + 9 − 3 × 5) × 3 = 3