计数 · 标数法 · 路径 | 发题 2026年10月18日

k×k 平行四边形网格：从 A 到 B 有几种走法

原题

如图，在 k×k 的平行四边形中，A、B 为一条对角线的两个顶点。一个动点从 A 出发，按照以下规则运动到 B 点：动点沿着图中箭头方向（往右或往上）移动，每次移动一步（一步或是图中最小平行四边形的两条邻边之一，或是最小平行四边形对角线），到达最小四边形的一个顶点。则动点从 A 移动到 B 点有____种不同的移动方法。

审题说明 审题说明：原图是 4 行 4 列共 16 个小平行四边形（5×5 个格点），所以按 k=4 计算；A 在左下角，B 在右上角。小平行四边形的左右两边向左上倾斜，对角线连接每个小格的左下顶点和右上顶点。图中三个箭头就是三种走法：向右走一条横边、沿斜边往上走一格、沿对角线往右上走一格；不能往回走。

标数法：看出递推规律（k=4）

1 看清三种走法

每一步只能向右、沿斜边向上、或沿对角线向右上。所以到达一个点的最后一步，只能来自它的左边一点、下边一点（沿斜边往下）或左下一点（对角线另一端）。

2 边上都标 1

最下面一行只能一直向右走，最左边一列只能一直沿斜边向上走，所以这些点都只有 1 种走法。

3 里面的点：三数相加

每个点=左边+下边+左下。从下往上一行一行标：第 2 行 1、3、5、7、9；第 3 行 1、5、13、25、41；第 4 行 1、7、25、63、129。

4 标到 B

最上一行 1、9、41、129，B=129（左）+129（下）+63（左下）=321。

k=4 时各格点标数（从上到下 5 行）

行	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列
第 5 行	1	9	41	129	**321**（B）
第 4 行	1	7	25	63	129
第 3 行	1	5	13	25	41
第 2 行	1	3	5	7	9
第 1 行	1（A）	1	1	1	1

按走了几步对角线分类

1 三种步子

把每一步记成一个字：右、上、斜。斜一步=右一步+上一步。

2 按斜步数分类

若走了 d 步斜，还要走 k−d 步右、k−d 步上，一共 2k−d 步，d 可以是 0、1、…、k。

3 排法计数

走法=这 2k−d 个字的排法：先在 2k−d 个位置里挑 d 个放「斜」，有 C(2k−d, d) 种；剩下 2k−2d 个位置挑 k−d 个放「右」，有 C(2k−2d, k−d) 种；其余放「上」。

4 分类相加

把 d=0 到 k 各类加起来就是答案。k=4 时：d=0,1,2,3,4 依次 70+140+90+20+1=321，与标数法一致。

不同 k 的走法数

k	1	2	3	4	5	6
走法数	3	13	63	**321**	1683	8989

审题说明 k=4 即图中情形

一句话

标数法看规律（每点=左+下+左下），分类计数得通用式：按斜步数 d 分类，走法=Σ C(2k−d, d)·C(2k−2d, k−d)，d 从 0 到 k；k=4 时为 321。

答案 · 移动方法数 $\sum_{d=0}^{k} C(2k-d,\, d)\cdot C(2k-2d,\, k-d)$

k=1～6 时依次为 3、13、63、321、1683、8989 种；图中 k=4，共 321 种。

易错点

漏掉对角线： 只算向右和向上，会得到 70 种（从 8 步里选 4 步向右），少了走对角线的走法。

对角线方向弄反： 图中对角线是左下到右上，所以加的是「左下」那个点，不是「左上」。

格数和点数： $k\times k$ 个小格有 $(k+1)\times(k+1)$ 个点，要标到第 $k+1$ 行第 $k+1$ 个点。

斜边的「下边」： 沿斜边往下的点在图上是右下方，不是正下方。

@haohan.org