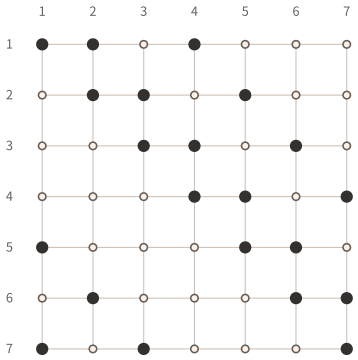
组合 · 极值构造 · 抽屉原理 | 发题 2026年10月26日

7×7 点阵中至少选多少个点，才能保证存在水平竖直长方形?

原题

从 7×7 的点阵中，至少要选出 _____ 个点，才能保证在这些选出的点中一定能找到四个点，恰好可以构成一个边为水平、竖直方向的长方形（含正方形）的四个顶点。

原理图解



21 点循环平移排法：每行 3 点，巧避所有长方形

第 1 行选第 1、2、4 列，后面每行向右循环平移一格。21 种列搭配各用一次，再加一个点就会出现长方形。

极简解答

1 列搭配的容量上限：21 种

同一行选中的任意两列，构成一种搭配；不同的行不能重复同一种搭配，否则出现长方形。

7 列中选两列，全部可能的列搭配只有 **C(7, 2) = 21 种**（即 21 个抽屉）。因此要想全阵不出现长方形，所有行产生的列搭配总数最多只能容纳 **21 种**。

2 正向推算点数上限：最多选 21 点

一行选的点越多，产生的搭配数增长越快（选 2 点产 1 种、选 3 点产 3 种、选 4 点跳到 6 种）。要在不超过 21 种搭配的前提下多放点，每行点数应尽量平均：

- **每行选 3 点**：7 行共 **7 × 3 = 21 点**，产生搭配 **7 × C(3, 2) = 21 种**，恰好占满全部 21 个抽屉！
- **若想选 22 点**：哪怕最省（6 行 3 点、1 行 4 点），搭配总数也会达到 **6 × 3 + 6 = 24 种 > 21**，必定重复碰撞出长方形！

因此，避开长方形的**理论上限就是 21 个点**。

3 验证 21 点可行，锁定答案 22 点

这 21 点的上限能否真正做到？第 1 行选 **第 1、2、4 列**，后面每行顺次向右循环平移 1 格：

行 1: (1, 2, 4) · 行 2: (2, 3, 5) · 行 3: (3, 4, 6) · 行 4: (4, 5, 7)

行 5: (5, 6, 1) · 行 6: (6, 7, 2) · 行 7: (7, 1, 3)

任意两行最多只有 1 个公共点，不多不少刚好把 21 种搭配各用一次，确实做到了 **0 个长方形**！

既然 21 个点可以完全避开，要想**保证必有长方形**，就必须突破这个上限，至少选出 **21 + 1 = 22 个点**。

答案 · 至少选点 **22** 个　21 点可以避开长方形，22 点一定出现长方形。