几何 · 立体图形 · 切割最值 | 发题 2026年10月18日

19×13×12 的木块：最多加工几个小圆柱

原题

一个长方体木块的长是19厘米，宽是13厘米，高是12厘米，最多可以加工成多少个底面直径是4厘米、高是5厘米的小圆柱体？

审题说明 每个小圆柱必须从木块上整块切出，不能拼接。本题按“每个圆柱占一块 4×4×5 的长方体”来算：先切成小长方体，再车成圆柱，这是这类题的标准理解。问题变成：19×13×12 的长方体里最多能放几个 4×4×5 的小长方体。圆柱的轴可以沿长、宽或高，不同部分可以朝不同方向。

按长方体算：先算单一方向，再混放，最后证明上限

1 只朝一个方向：最多 27

“5”放在哪条棱上，那条棱就按 5 去分，另两条按 4 去分：

轴沿长：19÷5＝3…4，13÷4＝3…1，12÷4＝3，共 3×3×3＝**27**；

轴沿宽：19÷4＝4…3，13÷5＝2…3，12÷4＝3，共 4×2×3＝24；

轴沿高：19÷4＝4…3，13÷4＝3…1，12÷5＝2…2，共 4×3×2＝24。

2 高按 4＋4＋4 分三层

12＝4＋4＋4 正好不剩，所以让圆柱都“躺着”，木块切成 3 层，每层厚 4 厘米。每层就是在 19×13 的长方形里摆 4×5 的长方形，面积 247÷20＝12…7，每层最多 12 个。

3 每层真能摆 12 个：方法一（风车排法）

直着切（一刀切到底）每层最多 11 个；要 12 个得像风车那样交错。以左下角为原点，长为横向、宽为纵向：

横放 8 个（5×4）左下角在 (4,0)、(9,0)、(14,0)、(14,4)、(0,5)、(0,9)、(5,9)、(10,9)；

竖放 4 个（4×5）左下角在 (0,0)、(5,4)、(10,4)、(15,8)。

只空出 7 个 1×1 小格（中间一条 1×5，和两个角上的 1×1）。三层都这样摆：12×3＝**36**。（已用程序逐格核对：不重叠、不出界。）

4 按长方体算，为什么不能是 37：抽屉原理

按 4×4×5 小长方体算，每块在长、宽、高三个方向上都至少占 4 厘米，所以中心只能位于长 2～17、宽 2～11、高 2～10 的范围内。把这个中心范围沿长、宽、高分别均分成 4、3、3 段，每段都小于 4 厘米，共有 4×3×3＝**36 个格子**。

如果放入 37 块，根据抽屉原理，必有两块的中心落在同一个格子里。它们的中心在三个方向上相距都小于 4 厘米，两块就必定重叠，不可能。所以按长方体算最多 36 个。

目前找到两种切出 36 个的方法

- **按长方体算**（每个圆柱先切成 4×4×5 的小长方体，这是小学题的标准理解）：用抽屉原理可以证明最多 36 个，答案是 36。方法一（风车排法）就是这种情况。
- **按真圆柱算**（允许错开摆，让圆柱嵌进缝里）：方法二也能切出 36 个。程序搜索没有找到 37 个的摆法，但目前还没有证明 36 一定是最多；能确定的只是不超过 47 个（按体积算）。

答案 · 最多加工 **36** 个 按小学题的标准理解，最多可以加工成 36 个小圆柱体。

方法二

方法二：宽 0～5 的区域沿宽错位相切放 14 个；长 0～15、宽 5～13 的区域沿长放 18 个；余下长 15～19、宽 5～13 的区域沿高放 4 个，共 36 个。

易错点

直接用体积相除： 按小长方体体积算，2964÷80≈37.05 只能给出上限 37，不能说明一定能放下；还要检查摆法。

只试一个方向： 三个方向分别是 27、24、24，混放才能到 36。

只用“一刀切到底”的分法： 这样最多 34 个；每层 12 个的方法一（风车排法）不能被一刀分成两块。

按圆柱体积算： 小学题的标准理解是先切出 4×4×5 小长方体，再车成圆柱；不能把车掉的边角体积当成完整的小长方体继续使用。